数理解析研究所講究録
176巻 1973年 9-21

トーラス上の力学系について

東大・理、 石井 一平.

§1、

2次元トーラス $T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ 上の flow で、T^2 全体を minimal set にするものを考える。即ち、以下で考える flow φ_t は次の性質をもつものとする。

1) 任意の $P \in T^2$ に対し、$\overline{\bigcup_{t \in \mathbb{R}} \varphi_t(P)} = T^2$

さらに、次の仮定を設ける。

2) φ_t は、transversal section (あるいは単に section) を持つ。

ここで、φ_t の transversal section とは、次の性質をもつ、simple closed curve C のことである。

i) 任意の $P \in T^2$ に対し、$\min\{t>0 \mid \varphi_t(P) \in C\}$ が存在する。

ii) C の近傍 U と、正数 δ が存在し、次をみたす。

任意の $P \in U$ に対し、$\left(\bigcup_{-\delta<t<\delta} \varphi_t(P)\right) \cap C$ は唯一点からなる。

(φ_t が non-singular C^1-flow ならば、section が存在すること

が知られている。(Siegel))

次に flow の同型を定義する。

Def. 二つの flow ρ_t^1 と ρ_t^2 が同型であるとは、T^2 の homeo. h と、正数 c が存在して、$\rho_t^1 = h \circ \rho_{ct}^2 \circ h^{-1}$ が成り立つことである。

(この定義は、もちろん phase space が一般でもよいが、ここでは必要ないので phase space は T^2 とした。)

性質 1), 2) を持つ flow のうち標準的な flow は、

$$\alpha_t(x, y) = (x+t, y+\alpha t) \quad ; \quad \alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$$

で与えられるものである。

(但し、$(x, y) \in \mathbb{R}^2$ で、$(x+m, y+n)$; $m, n \in \mathbb{Z}$ なる点は、すべて identify する。なお、以下では、"ρ_t" は 1), 2) をみたす一般の flow を表わすのに用い、"α_t" は上記の特別な flow を表わすのに用いるものとする。)

そこで、我々の目的は、次のように述べることができる。

A. 性質 1), 2) を持つ flow が、ある $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ に対し、α_t と同型になる条件を求める。

B. $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ を与えて、α_t と同型な flow を決定する。

§2.

ρ_t を T^2 上の flow で 1), 2) をみたすとする。そして、C を ρ_t の section とする。C の homeo. Γ を

$$\Gamma(P)=\rho_{T(P)}(P) \quad ; \; P\in C,\ T(P)=\min\{t>0 \mid \rho_t(P)\in C\}$$

で定義する.

一方、$S=\{e^{2\pi i t}\mid t\in\mathbb{R}\}$ とし、S の変換 R_γ を

$$R_\gamma(e^{2\pi i t})=e^{2\pi i(t+\gamma)} \quad ; \; \gamma\in\mathbb{R}\ (\text{const.})$$

で定義する.

その時、次の定理は、よく知られている。

Theorem. ρ_t が、1), 2) をみたすならば、S から C への homeo. h と、$\gamma\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ が存在して、次の diagram を可換にする。

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "R_\gamma"] \arrow[d, "h"'] & S \arrow[d, "h"] \\ C \arrow[r, "\Gamma"] & C \end{tikzcd}$$

この γ は、(flow ρ_t の section C に関する) rotation number と呼ばれる。(rotation number は整数差を除いて一意的。)

上の定理の "h" を用いて、$H;\ \mathbb{R}^2\to T^2$ を次のように定義する。

$$H(x,y) = \rho_{\tau(x,y)}\left(h\left(e^{2\pi i(y-\gamma x)}\right)\right)$$

但し、

$$\tau(x,y) = \{x\}\,T\left(h\left(e^{2\pi i(y-\gamma\{x\})}\right)\right) + \sum_{\substack{0 \leq k \leq x-1 \\ \text{or } x \leq k \leq 0}} T\left(h\left(e^{2\pi i(y-\gamma(x-k))}\right)\right)$$

$$(\,\{x\} \equiv x \bmod 1 \quad \& \quad 0 \leq \{x\} < 1\,)$$

このHが連続であることは明らか。又、$H(x+1,y)=H(x,y+1)=H(x,y)$をみたすことも容易に確かめることができる。さらに、$\{(x,y) \mid 0 \leq x < 1,\ 0 \leq y < 1\}$と$T^2$とが一対一に対応していることもすぐわかる。よって、HはT^2の座標変換を定義している。しかも、Hによってρ_tは

$$H^{-1} \circ \rho_t \circ H(x,y) = (x+\varphi(t;x,y),\ y+\gamma\varphi(t;x,y))$$

という形のflowに変換される。(ただし、$\varphi(t;x,y)$は各(x,y)についてtの単調増加関数.)

従って、1), 2).をみたすT^2上のflowはすべて、上のような形のflowに同型である。

§3.

ρ_tはT^2上のflowで、各(x,y)についてtの単調増加函数$\varphi(t;x,y)$を用いて

$$\rho_t(x,y) = (x+\varphi(t;x,y),\ y+\gamma\varphi(t;x,y))\ ;\ \gamma \in \mathbb{R}-\mathbb{Q}$$

と表わされているとする。(この ρ_t が、1), 2)、をみたすことは、明らかである。)

そのとき、次の命題が成り立つ。

Prop. ρ_t が almost periodic flow (a.p. flow) であるならば、

ρ_t は α_t に同型である。ただし、$\alpha = \lambda$。

証明) ρ_t が T^2 上の a.p. flow ならば、$\exp(2\pi i\, \varphi(t;x,y))$ は、

a.p. function。従って、a.p function の一般論により、

$$\varphi(t;x,y) = \lambda(x,y)t + \psi(t;x,y) \quad ; \ \psi(t;x,y) \text{ は a.p. function}$$

と表わすことができる。

$\lambda(x,y)$ は、実は、(x,y) によらない定数である。

実際、ρ_t は a.p. flow 故、任意の (x_0,y_0) と任意の $\varepsilon>0$ に対して、$\delta>0$ が存在して、

$$d((x_0,y_0),(x,y)) < \delta \quad \text{ならば}$$

$$d(\varphi(t;x_0,y_0),\varphi(t;x,y)) < \varepsilon \text{ for all } t \in R.$$

が成り立つ。(d は Euclid metric)

従って、$d((x_0,y_0),(x,y)) < \delta$ ならば、

$$d(\lambda(x_0,y_0)t + \psi(t;x_0,y_0),\ \lambda(x,y)t + \psi(t;x,y)) < \varepsilon$$

がすべての $t \in R$ に対して成り立つ。ところが $\psi(t;x,y)$ は a.p. function 故、有界。一方 $\lambda(x_0,y_0) \neq \lambda(x,y)$ ならば、

$d(\lambda(x_0,y_0)t, \lambda(x,y)t) \longrightarrow \infty$ (as $t \to \infty$)。

即ち、$\lambda(x_0,y_0) \neq \lambda(x,y)$ であるとすると、$d(\varphi(t;x_0,y_0), \varphi(t;x,y)) \to \infty$

(as $t\to\infty$) となり、φ_t が a.p. flow であることに矛盾する。
従って、$d((x_0,y_0),(x,y))<\delta$ ならば $\lambda(x_0,y_0)=\lambda(x,y)$ でなければならない。(x_0,y_0) は任意で、δ は一様。故に、$\lambda(x,y)=const.$

この定数を λ とおく。さらに、$\lambda\neq 0$ であることが、$\varphi(t;x,y)$ が単調増加函数であることからわかる。

そこで T^2 の座標変換を次のように定義する。

$$\begin{cases} x' = x + \lim\limits_{T\to\infty}\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T \psi(t;x,y)\,dt \\ y' = y + \lim\limits_{T\to\infty}\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T \gamma\psi(t;x,y)\,dt \end{cases}$$

この変換が T^2 の座標変換として well-defined であることは、T. Saito [2] の証明と全く、同様である。（ここでは省略）

この座標変換を h と置くと、

$$h\circ\varphi_t\circ h^{-1}(x',y') = (x'+\lambda t,\ y'+\lambda\gamma t)$$

∵ $h^{-1}(x',y')=(x,y)$, $h\circ\varphi_t\circ h^{-1}(x',y') = x'(t;x,y)$
とおくと

$$\begin{aligned} x'(t;x,y) &= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T (x+\varphi(t+s;x,y)-\lambda s)\,ds \\ &= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_t^{T+t} (x+\varphi(\tau;x,y)-\lambda\tau+\lambda t)\,d\tau \\ &= \lambda t + \left(x + \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_t^{T+t}\psi(\tau;x,y)\,d\tau\right) \\ &= x' + \lambda t \end{aligned}$$

同様に、

$$y'(t;x,y)=y'+\lambda\gamma t.$$

以上のことから、$c=\frac{1}{\lambda}$, $\alpha=\gamma$, そして h を上に構成したものにとれば

$$h\circ \rho_{ct}\circ h^{-1}=\alpha_t$$

が成り立つ。　　　　　　　　　　　　証明終り ┘

この命題と、§.2. で述べたことから、次の定理が導かれる。

Theorem. 1), 2) をみたす T^2 上の flow ρ_t が、ある $\alpha\in R-Q$ に対する α_t に同型である為の必要十分条件は ρ_t が a.p. flow であることである。

証明）十分性は、上の命題と §.2. の結果であり、必要性は、ρ_t が a.p. flow であることと、ρ_t が Liapunov stable であることが同値であることに注意すれば、簡単に証明することができる。（略） ┘

§.4.

この §.では、$\alpha\in R-Q$ を与えて、α_t に同型な flow を決定することを考える。

flow ρ_t は 1), 2) をみたしているとし、C を ρ_t の section であるとする。

Def. $T(P) = \min\{t>0 \mid \varphi_t(P) \in C\}$ が $P \in C$ によらない定数であるとき、C を constant section と呼ぶ。

このとき、次の Lemma が成り立つ。

Lemma 1. α_t の $(0,0)$ を通る constant section は、

$$C_{m,n} = \{(mt, nt) \mid 0 \leq t < 1,\ (m,n) = 1\quad m,n \in \mathbb{Z}\}$$

で、すべて尽くされる。

証明）. C が α_t の constant section で $(0,0) \in C$ とする。

C が constant section であるから、$T(P) = a$ (const) $(P \in C)$。

従って、$(0,0) \in C$ ならば、$(na, \alpha na) \in C$; $n \in \mathbb{Z}$。

集合、$\{(na, \alpha na) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ を含む T^2 上の curve が存在するのは、$a, \alpha a$ が

$$ka + l\alpha a \in \mathbb{Z} \quad ならば \quad k = l = 0 \quad (k, l \in \mathbb{Z})$$

という関係を満足する場合のみであり、それらの curve は、$C_{m,n}$ のいずれかである。($\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ であることに注意) 証明終り。

Lemma 2. φ_t は、1), 2) をみたし、$\varphi'_t = h \circ \varphi_{ct} \circ h^{-1}$ ($c>0$, h は homeo.) とする。

そのとき、C が φ_t の constant section ならば、$h(C)$ は φ'_t の constant section である。

証明） 明らか。

Lemma.3. ρ_tを1), 2)をみたすflow, Cをρ_tのsectionとする。そして、$\rho'_t = h\circ\rho_{ct}\circ h^{-1}$ ($c>0$, hはhomeo.)とする。そのとき、ρ_tのCに関するrotation numberとρ'_tの$h(C)$に関するrotation numberとは、等しい。

証明) 明らか。

Lemma.4. T^2の座標変換 $h(x,y)=(x',y')$ が次をみたしているとする。

i) $h(0,0)=(0,0)$

ii) $h\circ\alpha_t\circ h^{-1}(x',y')=(x'+t,\ y'+\alpha t)$ $(\alpha\in R-Q)$

そのとき、hは恒等写像。即ち、$h(x,y)=(x,y)$である。

証明) Lemma.1, 2 によって、$h(C_{0,1})$は$C_{m,n}$のいづれかでなければならない。ところが、$(m,n)\neq(m',n')$ならば、α_tの$C_{m,n}$に関するrotation numberと$C_{m',n'}$に関するrotation numberとは相異なる。従って、Lemma.3.によって$h(C_{0,1})=C_{0,1}$である。

$h(0,0)=(0,0)$故、仮定ii)と$h(C_{0,1})=C_{0,1}$によって、$h(0,\alpha)=(0,\alpha)$, ---, $h(0,n\alpha)=(0,n\alpha)$, --- $(n\in Z)$。hはT^2の座標変換故、$h(0,\delta+m)=h(0,\delta)$ ($\delta\in R$, $m\in Z$) 且つ、$\alpha\in R\setminus Q$。従って、任意のyに対し、$h(0,y)=(0,y)$が成り立つ。

さらに、$(x,y)=\alpha_x(0,y-\alpha x)$であるから、仮定ii)より、すべての$(x,y)$に対し、$h(x,y)=(x,y)$が成り立つ。　証明終り $\lrcorner$

Lemma.5. $\alpha, \alpha' \in \mathbb{R}-\mathbb{Q}$, h は T^2 の座標変換, c は正の定数で次をみたすとする。

i) $\alpha'_t = h \circ \alpha_{ct} \circ h^{-1}$

ii) $h(0,0)=(0,0)$

そのとき, h は線型変換で, 且つ, $\alpha' = \dfrac{k+l\alpha}{m+n\alpha}$

但し, k, l, m, n は $h(x,y)=(kx+ly,\ mx+ny)$ なる整数。

$\left(\det\begin{pmatrix} k, & l \\ m, & n \end{pmatrix} = \pm 1 \right)$

証明) Lemma.1,2,および Lemma.4 より明らか。

次の定理は Lemma.5 と §.3 の定理から得られる。

Theorem. $\alpha \in \mathbb{R}-\mathbb{Q}$ は与えられているとする。

そのとき, ρ_t が α_t に同型である為の必要十分条件は, ρ_t が次の二つの条件を満足することである。

i) ρ_t は 1), 2) をみたす, a.p. flow である。

ii) ρ_t のある section に対する rotation number を γ とすると,

$$\gamma = \frac{k+l\alpha}{m+n\alpha} \ ;\ k, l, m, n \in \mathbb{Z} \quad \det\begin{pmatrix} k, & l \\ m. & n \end{pmatrix} = \pm 1$$

と書ける。

§.5.

次に, ρ_t が C^r-vector field $(1 \leq r \leq \infty)$ で生成され, かつ, smooth な invariant measure を持つ場合を考える。

つまり、φ_t は vector field $X = X_1\frac{\partial}{\partial x} + X_2\frac{\partial}{\partial y}$ で生成されていて、X_1, X_2 ある正値函数 M に対し

$$\frac{\partial(MX_1)}{\partial x} + \frac{\partial(MX_2)}{\partial y} \equiv 0$$

をみたしていると仮定する。（X および M は一回連続微分可能とする。）

この場合、至る所 $X \neq 0$ で $\int_{T^2} MX_1\,dxdy \Big/ \int_{T^2} MX_2\,dxdy$ が無理数ならば、φ_t は 1), 2) をみたすことが知られている。[1]

φ_t の section C に関する rotation number γ は

$$\gamma = \frac{k + l\gamma_0}{m + n\gamma_0} \quad ; \quad \gamma_0 = \int_{T^2} MX_1\,dxdy \Big/ \int_{T^2} MX_2\,dxdy$$

$$k, l, m, n \in \mathbb{Z}, \quad \det\begin{pmatrix} k, & l \\ m, & n \end{pmatrix} = \pm 1$$

と表わされることが容易にわかる。（k, l, m, n は C のとり方に依存する。くわしく言えば、C の homotopy class によって決まる。）

従って定理は次の様に書ける。

Theorem. $\frac{\partial(MX_1)}{\partial x} + \frac{\partial(MX_2)}{\partial y} \equiv 0$ $(M \in C^1,\ M > 0)$ を満足する C^1-vector field $X = X_1\frac{\partial}{\partial x} + X_2\frac{\partial}{\partial y}$ で生成される flow が与えられた α_t $(\alpha \in R - Q)$ に同型である為の必要十分条件は、X が次をみたすことである。

i). 至る所 $X \neq 0$

ii) $\int_{T^2} HX_1\,dxdy \Big/ \int_{T^2} HX_2\,dxdy = \dfrac{k+l\alpha}{m+n\alpha}$

$\quad ;\ k,\ l,\ m,\ n \in \mathbb{Z}\ ,\ \det\begin{pmatrix} k & l \\ m & n \end{pmatrix} = \pm 1$

iii) Xで生成されるflowは、a.p. flow

最後に、vector fieldによって生成されるflowがa.p.である為の十分条件を与える。

Theorem. vector field Xが次の条件をみたせば、Xによって生成されるflowはa.p. flowである。

i) $X = X_1\dfrac{\partial}{\partial x} + X_2\dfrac{\partial}{\partial y}$ は $\dfrac{\partial X_1}{\partial x} + \dfrac{\partial X_2}{\partial y} \equiv 0$ をみたす。

ii) $\gamma = \int_{T^2} X_1\,dxdy \Big/ \int_{T^2} X_2\,dxdy$ に対し、正の定数K, νが存在し、任意の整数pと任意の自然数qに対し

$$\left|\gamma - \frac{p}{q}\right| \geqq K q^{-\nu}$$

をみたす。

iii) XはC^{μ}-vector fieldである。ただし、$\mu \geqq \nu$。

証明は省略する。

S. Sternberg [3] によれば、上の定理と同じ条件で、Xによって生成されるflowは、α_tに同型であり、($\alpha = \gamma$)、且つ、同型写像hは、~~$\mu-2\nu$~~個連続微分可能にとれるとしているが、その証明には疑問があると、思われる。

— 参考文献 —

[1] Saito. T, On the measure-preaserving flow on the torus, Journ. Math. Soc. Jap. 3. No. 2 (1951) 279–284

[2] ———, On dynamical systems in n-dimensional torus Funk. Ekvac. 7. (1965) 91–102

[3] Sternberg. S, Celestial Mechanics Part II. Benjamin (1969)